Che cos'è la probabilità

Bruno Arrigoni, Lorenzo Peccati
CISA — Firenze

Autunno 2021

1 Vero, falso, incerto

Dipende dallo *stato d'informazione*.

Esempio

Vero, falso o incerto che:

$$\frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}{1 \times 2 \times \cdots \times n} \approx 1 \text{ con } n \text{ intero grande?}$$

Io lo so, voi no.

Si chiama Formula di De Moivre-Stirling

$$\frac{2^2 \mathrm{e}^{-2}\sqrt{4\pi}}{2!} = 0.959\,5$$

$$\frac{10^{10} \mathrm{e}^{-10}\sqrt{20\pi}}{10!} = 0.991\,7$$

$$\frac{20^{20} \mathrm{e}^{-20}\sqrt{40\pi}}{20!} = 0.995\,84$$

La risposta è **vero**, sulla base del mio stato d'informazione, **incerto** sulla base del vostro.

2 Cose ovvie

La probabilità aspira a misurare con un numero tra 0 e 1 = 100% l'incertezza/certezza.

- 0 corrisponde all'impossibilità
- 1 corrisponde alla certezza
- un numero tra 0 e 1 all'incertezza

E' un'idea intuitiva.

Va vista come strumento operativo.

Nel caso di De Moivre-Stirling, io dico "probabilità 1", uno che non sa alcunché e quindi non ha motivo per ritenere che sia più probabile dell'altra ciascuna delle due possibilità estreme, darà "probabilità 1/2".

Caratteristiche dell'incertezza:

- fastidiosa
- non è razionalmente famigliare
- scivolosa: il caso delle 10 teste
- sottovalutata

Un esempio (di stampo universitario)

- Corso nuovo, molto selettivo.
- Nella popolazione dei candidati si stima che gli adatti siano il 10%, i non adatti il 90%.
- Si dispone d'un buon *test*, che funziona al 90%: un adatto lo passa con probabilità 90%, un non adatto non lo passa con probabilità 90%.
- Un candidato fa il *test* e lo passa: qual è la probabilità che sia adatto?

Risposte censite

- La maggioranza dice 90%
- Gl'ingegneri di solito 81%
- La giusta è 50%

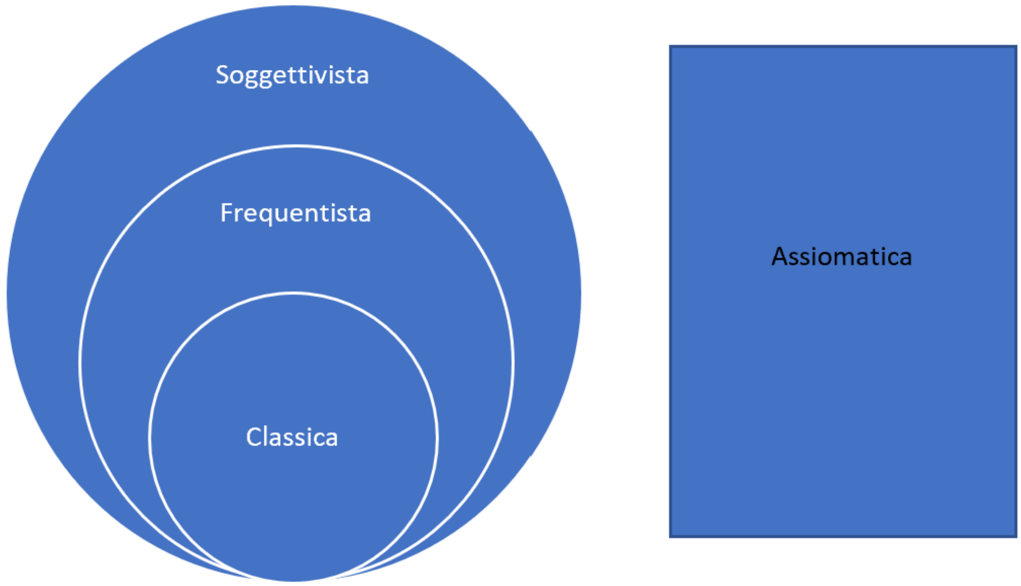
Spiegazione intuitiva

La probabilità è intuitiva se l'intuizione è educata:

- candidati adatti: $\underbrace{c_1, c_2, \ldots, c_{10}}_{\text{10 in tutto}}$;
- candidati inadatti:$\underbrace{c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{100}}_{\text{90 in tutto}}$;
- usando intuitivamente la probabilità di successo nel *test* otteniamo che degli adatti ne sopravvivono il 90% di 10, cioè 9, dei non adatti sopravvivono il 10% di 90, cioè 9: lo stesso numero!

3 Difficoltà rilevante

- diverse teorie: complete e incomplete
- diverse teorie: evoluzione nel tempo



Teorie complete (come si calcola e come funziona):

- CLASSICA (P.S. Laplace)
- FREQUENTISTA o STATISTICA (R. von Mises)
- SOGGETTIVA (B. de Finetti, F.P. Ramsey)

Teoria incompleta (solo come funziona)

- ASSIOMATICA (A.N. Kolmogorov)

Teoria classica

Nasce nel mondo dei giuochi di sorte, caratterizzato da **simmetrie** tra casi possibili:

$$\text{probabilità} = \frac{\text{n. casi favorevoli}}{\text{n. di casi possibili, purché equipossibili}}$$

- evidente vizio logico ("equipossibili")
- confusione tra "che cosa è la probabilità" e come, talora, calcolarla
- esempio: "Vivo domani a mezzogiorno"

Teoria frequentista o statistica

Nasce nel mondo delle Scienze della Natura, caratterizzata dalla **ripetibilità** d'un esperimento in condizioni giudicate equivalenti.

Basata sulla frequenza:

$$\text{frequenza di successo in } n \text{ prove} = \frac{\text{numero di successi}}{\text{numero di prove}}$$

$$\text{probabilità} \approx \text{frequenza se il n. di prove è alto}$$

- dubbi su ripetibilità
- confusione tra "che cosa è la probabilità" e come, talora, calcolarla
- altezza del numero di prove
- esempio: "Il caso Bimba"

Teoria soggettiva

Nasce nel mondo delle Scienze Sociali, dove simmetria e ripetibilità non sono affatto garantite (naturale anche in àmbito giuridico):

probabilità = riassunto operativo d'uno stato d'informazione

- compatibile con classica e frequentista
- razionalizza l'inferenza statistica attraverso il teorema di Bayes
- naturalezza inaspettata

Teoria assiomatica

- Il funzionamento della probabilità, nelle teorie complete, è lo stesso
- La teoria assiomatica descrive come tutto il calcolo delle probabilità discenda da $3 + 1$ assiomi

Strategia consigliata:

- pensare ai conti secondo l'assiomatica
- pensare alla probabilità come soggettiva (anche perché essa contiene le altre due)